

# Die wunderbare Welt der Schüttgüter

H. J. Herrmann

Seit einigen Jahren findet das ungewöhnliche Verhalten von Schüttgütern wieder das Interesse der Physiker. Die Tatsache, daß Stöße zwischen Körnern inelastisch sind, induziert Agglomerationen und Wellen im Rohrfluß und Anomalien in der Viskosität. Das nichtlineare Kraftgesetz des Kontaktes zwischen zwei Körnern führt zur Druckabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit. Vibriertes Schüttgut konvektiert, entmischt und bildet spontan Haufen. Theoretische Ansätze wie die Mohr-Coulombsche Plastizitätstheorie oder die kinetische Gastheorie geben gute Ergebnisse in den Extremfällen hoher und niedriger Dichten. So kann man z. B. das fraktale Netz von Scherbändern deformierter Packungen reproduzieren. In den meisten praktischen Fällen jedoch sind die existierenden Theorien nicht anwendbar. In den letzten Jahren haben numerische Rechnungen wesentlich dazu beigetragen, die Welt der Schüttgüter zu entschlüsseln.

## 1. Die Schüttgüter in der Physik

Sieht ein Physiker nochmals etwas genauer in den Sandkasten der Kindheit, so erwarten ihn einige lustige Überraschungen. Während die Oberfläche des Sandes sich beliebig verformen läßt und loser Sand wie eine Flüssigkeit weggeschüttet werden kann, ist das Innere so fest, daß man zum Beispiel ohne

Schwierigkeiten mit dem Auto auf einem Strand fahren könnte (aber nicht sollte). Sand bewegt sich eher ruckartig: Kippt man beispielsweise Sand auf einer schiefen Ebene an, so rutscht er in unregelmäßigen Lawinen herunter, die friedlich erstarren, wenn sie unten ankommen. Selbst im fließenden Zustand findet man Ungewöhnliches: Die Sanduhr funktioniert nur, da das Hagen-Poiseuillesche Gesetz nicht gilt, denn nur so kann die Ausflußgeschwindigkeit unabhängig von der Füllhöhe sein, was die lineare Meßskala ergibt.

Schüttgüter wie Sand, aber auch Mehl und Zucker, Erze und Geröll, Pillen und Granulate, Zement und Toner, sind technologisch sehr wichtig. Ihr Verhalten wird seit Anfang des Jahrhunderts von Ingenieuren studiert, in Deutschland heutzutage hauptsächlich von Verfahrenstechnikern, in Amerika eher im Bereich des „chemical engineering“. Viele erstaunliche empirische Gesetze sind bekannt, jedoch war das Interesse bislang im wesentlichen anwendungsorientiert.

Noch im letzten Jahrhundert faszinierten die

exotischen Eigenschaften der Pulver die Physiker, und Faraday, Reynolds, Hagen waren unter jenen, die bedeutende Beiträge zu ihrem Verständnis leisteten. Da es niemanden gelang, eine geeignete Kontinuums-theorie zu formulieren, waren Schüttgüter für den „modernen“ Theoretiker der Jahrhundertwende jedoch nicht mehr salonfähig. Erst vor einigen Jahren erlebte das Interesse der Physiker an Schüttgütern eine Renaissance. Dies beruhte zum einen auf neuen Konzepten zum Verständnis ungeordneter Medien und kollektiver Systeme (wie z. B. die „selbstorganisierte Kritikalität“ [1]). Zum anderen bieten die Rechenanlagen unserer Zeit neue Möglichkeiten zur Lösung von Vielteilchensystemen und erlauben oft quantitativen Vergleich mit dem Experiment. Mit den Methoden der Molekulardynamik kann man die Bahn jedes einzelnen Korns für realistische Zeitintervalle (d. h. Minuten) berechnen und gleichzeitig bis zu  $10^4$  Körner verfolgen. Noch mehr Teilchen lassen sich mit Gittergasmodellen [2] simulieren. Diese auf regelmäßigen Gittern definierten Zellularautomaten sind besonders gut für Parallelrechner geeignet.

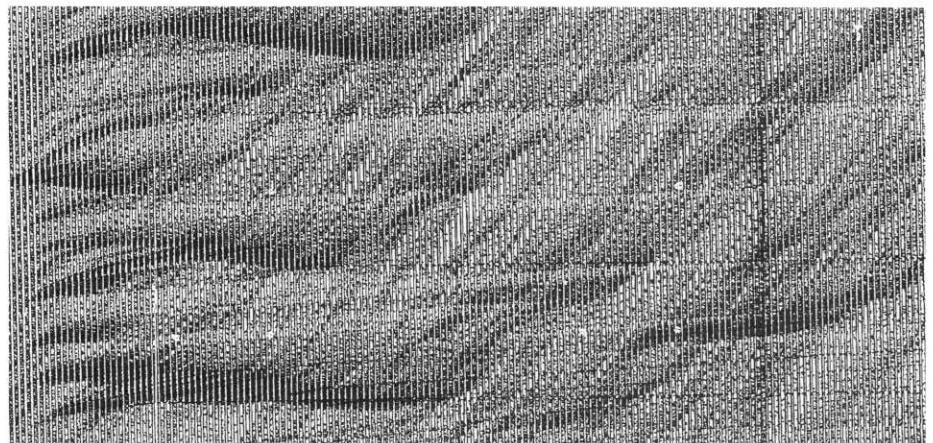


Abb. 1: Raum-Zeit-Diagramm sphärischer Teilchen, die in einem Rohr (senkrechte Linien) unter der Schwerkraft beschleunigt werden. Dasselbe teilchengefüllte Rohr wird zu verschiedenen Zeitpunkten nebeneinander gezeigt. Die Zeit läuft von links nach rechts, die Gravitationskraft wirkt von unten nach oben. Die Computersimulation zeigt deutlich große, fast stehende Verdichtungen und Ausdünnungen sowie Linien konstanter Steigung, die den sog. „kinematischen Wellen“ entsprechen. Diese Molekulardynamikrechnungen wurden von Th. Pöschel für sphärische Teilchen in einer zweidimensionalen Geometrie mit periodischen Randbedingungen erstellt.

Prof. Dr. Hans J. Herrmann, ICA I, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 27, D-70550 Stuttgart.

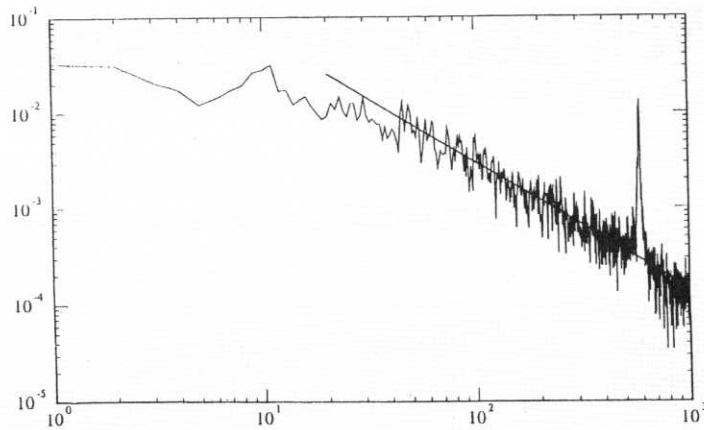


Abb. 2: Analyse der Fluktuationen im Frequenzraum: Das Spektrum der Dichte ist doppellogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen. Man erkennt ein Potenzgesetz mit dem Exponenten  $4/3$  und eine Linie, die den kinematischen Wellen entspricht. Diese Rechnung wurde mit einem dissipativen Gittergas auf einem Dreiecksgitter durchgeführt (aus Ref. [2]).

## 2. Was ist an Schüttgütern so besonders?

### 2.1 Dissipation von Energie

Wichtig für den Physiker ist die Tatsache, daß Schüttgüter ein dissipatives System darstellen: Aufgrund der (plastischen) Verformung der Kornoberflächen sind die Zusammenstöße zwischen den Sandkörnern inelastisch. Die entstehende Wärme wird abgestrahlt oder von der Luft weggeblasen. Im Gegensatz zu den mikroskopischen Gesetzen der Physik geht hier also lokal Energie verloren. Wenn man nicht stets Energie zuführt, so verfällt der Sand in den Ruhezustand. Wir alle wissen, daß man einen Sandkasten nicht wie ein Planschbecken aufwirbeln kann – wenn wir es versuchen, so wird die Hand heiß. Ähnliche dissipative Systeme sind zum Beispiel der Verkehrsfluß von Autos und die kollektive Bewegung von Lebewesen (Bakterienkolonien, Fischschwärme usw.).

Dissipation hat eine Dichtestabilität zur Folge: In Bereichen etwas erhöhter Dichte treten häufiger inelastische Kollisionen auf. Dadurch wird die lokale kinetische Energie erniedrigt, was einen Abfall des lokalen Druckes zur Folge hat. Weitere Masse fließt in diese Tiefdruckzone. Dadurch werden spontan entstandene Verdichtungen immer dichter. Im Rohrfluß pflanzen sich die Verdichtungen als Wellen fort, die große Ähnlichkeit zu den Stauwellen auf Autobahnen haben. Beim Entleeren industrieller Silos können solche Stoßwellen sporadisch so starke Kräfte auf die Wand ausüben, daß sie in sogenannten „Silobeben“ große Förderanlagen zerschmettern und häufig enormen Schaden anrichten.

Neueste Untersuchungen haben gezeigt, daß wie bei Erdbeben kritische Fluktuationen vorliegen. Das heißt, daß beliebig langwellige Verdichtungen auftreten können. Ähnlich wie im tektonischen Fall kommt das System

von selbst in diesen kritischen Zustand, was auch „selbstorganisierte Kritikalität“ genannt wird [1]. In Abb. 1 sehen wir ein Raum-Zeit-Diagramm sphärischer Teilchen, die in einem Rohr unter der Schwerkraft beschleunigt werden. Diese Computersimulation zeigt deutlich große, fast stehende Verdichtungen und Ausdünnungen sowie Linien konstanter Steigung, die den sogenannten „kinematischen Wellen“ entsprechen. Quantitativ lassen sich diese Fluktuationen im Frequenzraum analysieren. In Abb. 2 ist die zeitliche Fourier-Transformation der Dichte an einem Ort doppellogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen. Man erkennt ein Potenzgesetz mit dem Exponenten  $4/3$  und eine Linie, die den kinematischen Wellen entspricht.

Aufgrund der Dissipation ist in fließendem Sand die Geschwindigkeit der Zitterbewegung der Körner von der gleichen Größenordnung wie die Flußgeschwindigkeit selbst. In der Sprache molekularer Flüssigkeiten hieße das, daß man thermische und konvektive Beiträge nicht voneinander trennen kann. Deshalb ist die Viskosität nicht konstant, sondern wächst proportional zur Schergeschwindigkeit. Dies Gesetz wurde erstmalig 1954 vom englischen Brigadier Bagnold gemessen. Wegen der lokalen Dissipation verhält sich Sand also wie eine nicht-newtonsche Flüssigkeit.

### 2.2 Nichtlineare Kräfte

Im ruhenden Sandhaufen haben auch die Kräfte, die zwischen den Körnern wirken, ihre Besonderheiten. Im Idealfall trockenen Schüttgutes gibt es keine rücktreibenden Kräfte unter Zugspannungen. Unter Druck hingegen hängen die Kräfte zwischen den Körnern von deren Form ab: Im Falle von Kugeln, zum Beispiel, wächst die elastische Abstoßungskraft  $F_n$  wie

$$F_n \propto \delta^{3/2} \quad (1)$$

mit der Auslenkung  $\delta$  an. Dieses „Hertzsche Gesetz“ beruht darauf, daß sich beim Zusammendrücken die Kontaktfläche vergrößert, und läßt sich auch noch für etwas kompliziertere Kornformen berechnen, was im allgemeinen den Exponenten in Gl. (1) ändert. Tangential zur Kontaktfläche wirkt das Coulombsche Reibungsgesetz starrer Körper mit einer bremsenden Gleitreibung im bewegten Fall und einer im allgemeinen stärkeren Haftreibung, wenn keine tangentielle Relativbewegung vorliegt.

Das nichtlineare Verhalten des Einzelkontaktes wird in einer Packung vieler Teilchen noch verstärkt: Durch die Unordnung berühren sich benachbarte Körner an vielen Stellen nicht. Man hat also „offene“ Kontakte. Drückt man den Haufen zusammen, so werden noch offenstehende Kontakte geschlossen. Die benötigte Kraft wächst durch diese zusätzlichen Kontakte so stark an, daß ein Gesetz der Form von Gl. (1) mit einem Exponenten, der größer als vier ist, gefunden wird.

Ruht eine Packung im Schwerfeld, so wird das Gewicht der oberen Teilchen über aus Kontakten bestehenden Kraftlinien nach unten übertragen. Wird die Schwerkraft kleiner, so treten diese Linien spärlicher auf – jede einzelne trägt allerdings dann einen größeren Anteil der zu übertragenden Kräfte. Geht die Schwerkraft gegen Null, wird das Kontaktnetzwerk, also die Menge aller Kraftlinien, sogar fraktal.

Diese Nichtlinearitäten führen zu allerlei Anomalien in der Schallausbreitung. Besonders bekannt ist der sogenannte „Mirage Effekt“ [3]: Eine anfangs ebene Schallwelle mit vertikalen Ebenen und horizontaler Ausbreitungsrichtung biegt sich mit der Zeit nach oben, so daß die Ebenen immer mehr in

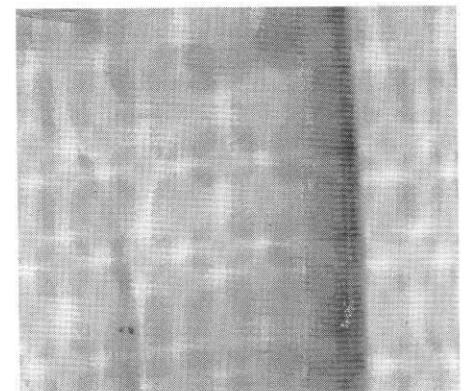


Abb. 3: Ausbreitung einer Wellenfront, die durch eine plötzliche Verschiebung der linken Wand bewirkt wurde, in einem Medium gleichgroßer Kugeln, die dem Kraftgesetz von Gl. (1) folgen. Man sieht, daß die Schallgeschwindigkeit nur sehr schwach mit der Tiefe zunimmt. Hinter der ersten Wellenfront folgt eine zweite, langsamere Welle. Der Grauton ist zur lokalen Stärke der kinetischen Energie proportional (aus der Doktorarbeit von S. Melin).

die Horizontale gehen. Dies beruht darauf, daß die Schallgeschwindigkeit  $c$  mit der Tiefe  $d$  anwächst. In einem aus Kugeln aufgebauten Haufen sagt das Hertzsche Gesetz der Gl. (1)  $c \propto d^{1/6}$  voraus. Simulationen mit 64 000 Teilchen auf der Connection Machine CM-2 der GMD in St. Augustin ergaben ein etwas komplizierteres Bild, wie in Abb. 3 zu erkennen ist. Man sieht, daß die Schallgeschwindigkeit nur sehr schwach mit der Tiefe zunimmt. Hinter der ersten Wellenfront folgt eine zweite, langsamere Welle. Mit eindimensionalen Modellen (Nesterenko-Gleichung) kann man zeigen, daß es unendlich viele, zunehmend schwächere Wellen höherer Ordnung gibt.

### 2.3 Entmischung

Die Teilchennatur des Schüttgutes birgt weitere Freiheitsgrade: Man kann zum Beispiel Körner verschiedener Größe oder Form zusammenwerfen. Eine typische Erscheinung ist die Entmischung der verschiedenartigen Teilchen, was man zum Beispiel beim Herabfließen auf einer schiefen Ebene, in einer rotierenden Trommel, auf Schüttelrinnen und vibrierenden Platten und sogar in den Asteroidenringen beobachten kann.

Spektakulär ist zum Beispiel der „Paranuß“-Effekt: Man mische große und kleine Teilchen gleicher Dichte in einem Gefäß. Schüttelt man das Gefäß, so findet eine Ausscheidung der großen Teilchen an der Oberfläche statt. Die Details der Ursachen dieses Effektes sind bis heute noch umstritten.

Ein möglicher Mechanismus, der die großen Teilchen nach oben treiben kann, ist Konvektion. Man beobachtet, daß in vibriertem Sand oberhalb einer gewissen Schüttelbeschleunigung Konvektionsrollen entstehen, ähnlich wie bei Flüssigkeiten in einem Temperaturgradienten im klassischen Rayleigh-Bénard-Experiment. Neue Rechnungen zeigen, daß ein großes Teilchen sogar über sich selbst seine eigene Konvektionszelle induzieren kann, die es dann hochtreibt [4]. Abb. 4 zeigt das Geschwindigkeitsfeld der Kugeln in einem vibrierenden Kasten. Im rechten Bild ist zusätzlich noch eine viermal größere Kugel unten eingesetzt worden. Man sieht deutlich, daß die Konvektionszellen durch die Anwesenheit der großen Kugel wesentlich stärker ausgeprägt sind.

In einer rotierenden Trommel findet man zum Beispiel Teilchenausscheidungen in der Form von Streifen, die senkrecht entlang der Trommelachse entstehen, und beim freien Fall beobachtet man Entmischungstreifen entlang der Flugrichtung. Ausscheidung und Entmischung sind technologisch meist ein Problem, zum Beispiel, wenn es darum geht, eine Mischung von Nüssen verschiedener Sorten in einem bestimmten Verhältnis zu verpacken.

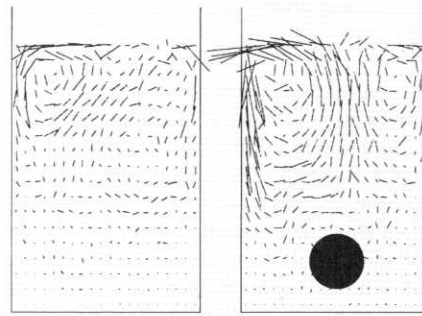


Abb. 4: Geschwindigkeitsfeld von 930 Kugeln mit zufälligen Radien zwischen 0,85 cm und 1,15 cm in einem Kasten, der mit Frequenz 2,8 Hz und Amplitude 2 cm vibriert; rechts mit einer zusätzlichen, viermal größeren Kugel. Man sieht deutlich, daß die Konvektionszellen durch die Anwesenheit der großen Kugel wesentlich stärker ausgeprägt sind. (Aus Ref. 4)

### 3. Theoretische Ansätze

Das Verhalten des Schüttgutes wird entscheidend durch seine Dichte bestimmt. In den Extremfällen hoher und geringer Dichte wurden von Ingenieuren in den letzten dreißig Jahren relativ nützliche Kontinuums-theorien entwickelt. Zur Berechnung der Verformung dicht gepackten Schüttgutes benutzen Bodenmechaniker eine „nichtassoziierte Mohr-Coulombsche“ Plastizitätstheorie [5]. Dies sind Differentialgleichungen in den Verschiebungsvektoren mit einer nicht-linearen Nebenbedingung, welche den plastischen Fließpunkt festlegt. Im Gegensatz zur Metallplastizität erhöht sich der Fließpunkt proportional zum außen angelegten Druck. Außerdem gibt es im allgemeinen eine Volumenänderung, die durch den „Dilatanzwinkel“ bestimmt wird. Diese Theorie erklärt unter anderem die Entstehung von Scherbändern: Verformt man vorsichtig einen mit Sand gefüllten Kasten, so sieht man auf der Oberfläche des Sandes parallele Linien entstehen. Diese sind die sichtbaren Schnitte von Gleitebenen im Inneren des Sandes. Entlang dieser Ebenen niedrigerer Dichte können dichter gepackte und somit unbewegliche Sandpakete aneinander vorbeigleiten. Die Existenz dieser singulären Ebenen wurde auch durch eine Stabilitätsanalyse der Plastizitätsgleichungen gezeigt [6]. In Abb. 5 sehen wir das Resultat einer numerischen Lösung der Gleichungen, wenn die beiden seitlichen Wände zusammengedrückt werden, während gleichzeitig mit der gleichen Geschwindigkeit oben und unten gezogen wird. Ein komplexes Netzwerk von Scherbändern entsteht. Verfeinert man die Auflösung  $l$  des Gitters, werden die Linien dünner und zahlreicher [6]. Wieder rutscht das System von selbst in einen kritischen Zustand, denn die Dichte lokaler plastischer Zonen  $\rho$  geht wie  $\rho \sim l^{1,58}$  gegen Null. Mit anderen Worten, das Netzwerk ist „fraktal“.

Die Plastizitätstheorie ist nur gültig, wenn das Schüttgut dicht gepackt ist. Abweichungen treten schon auf, wenn man Stagnationszonen in Trichtern oder Pfropfen im Rohrfluß berechnen will.

Wird der Sand so aufgewirbelt, daß die Körner einen endlichen Abstand voneinander haben, dann läßt sich eine kinetische Gastheorie mit Energiedissipation formulieren, was unabhängig von Haff, Jenkins und Savage getan wurde [7]. Diese Theorie reproduziert die Bagnoldsche Viskosität und ergibt realistische Geschwindigkeitsprofile für vibrierte Pulverbetten, kann jedoch weder die Entmischung beschreiben noch die Existenz endlicher Böschungswinkel berücksichtigen.

Die ungewöhnlichsten Phänomene treten in den intermediären Dichtebereichen auf, in denen keine der beiden Theorien mehr Gültigkeit hat. Aufschlußreich, um die auftretenden Schwierigkeiten zu verstehen, ist folgendes von Reynolds 1885 beschriebenes Experiment [9]: Man fülle einen Ballon mit Sand und Wasser und befestige oben ein Röhrchen zur Messung des Wasserstandes. Wenn man nun den Ballon verformt, so sinkt der Wasserspiegel, während er ja ohne Sand steigen sollte. Der Grund ist, daß der zusammengedrückte Sand sich erst ausdehnen muß, um die „Reynoldsche“ Dichte  $\rho_d$  zu erreichen, bevor man ihn verformen kann. In diesem Sinne liegt also ein negativer Poisson-Koeffizient vor. Für Dichten unterhalb von  $\rho_d$  ist der Sand dann relativ frei beweglich. Viele kennen dies Phänomen vom Urlaub: Tritt man fest auf den nassen Strand, so wird der Sand um den Fuß herum nicht etwa hinuntergedrückt und füllt sich mit Wasser, sondern er wird trocken.

Sand, der vibriert, geschüttet oder geschert wird, dehnt sich lokal aus, um zu fließen, verdichtet sich jedoch sofort wieder auf-

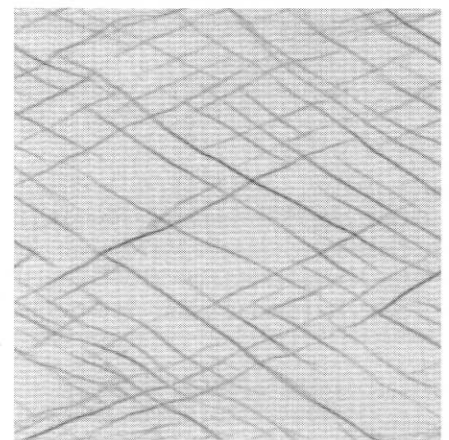


Abb. 5: Numerische Bestimmung des Netzwerks von Scherbändern in einem granularen Festkörper auf einem Quadratgitter der Größen  $300 \times 300$ . Der Grafton entspricht der lokalen Schergeschwindigkeit. Näheres siehe Text. (Aus Ref. 6)

grund der Dissipation und erstarrt. Dieses Wechselspiel führt zur stockenden („intermittenten“) Beweglichkeit der Lawinen auf der Oberfläche eines Sandhügels [10], zu ruckartigen Verschiebungen unter konstanter Scherkraft (stick-slip motion) und zu den anfangs erwähnten Dichtefluktuationen in einem Rohr oder einem ausfließenden Trichter. Das generische Verhalten eines solchen Systems mit Schwellwertdynamik wurde in vereinfachten Modellen von Bak und Mitarbeitern [1] untersucht und mit dem Namen „selbstorganisierte Kritikalität“ versehen: Überschreitet man den Schwellwert, kann man Kettenreaktionen von beliebiger Größe auslösen, deren Verteilung einem Potenzgesetz folgt. Angewandt auf das Schüttgut heißt das, daß das Unterschreiten der Reynolds-Dilatanz Verflüssigungszonen beliebiger Größe auslösen kann. In der Tat findet man experimentell Potenzgesetze für die Größenverteilung der Lawinen auf kleinen Sandhaufen [10], für das akustische Emissionsspektrum unter Scherung und für das Frequenzspektrum der Dichte- und Kraftfluktuationen in Trichtern. Lawinen auf größeren Sandhaufen haben allerdings eine charakteristische Größe und Frequenz wegen der

unterschiedlichen Gleit- und Haftreibung [10].

Theoretische Ansätze ganz neuer Art, wie Langevin-Gleichungen, dynamische Systeme und spinlose Fermionen, wurden in den letzten Jahren von Physikern angerissen, um die exotische Eigenschaft nahe der Reynoldsschen Dilatanz zu beschreiben. Analogien zu Spingläsern, Vertexmodellen und Zufallsgittern wurden vorgeschlagen. In der Zukunft sind vermutlich noch aufregende Einsichten zu erwarten. Über Schüttgüter gibt es noch viel Ungewöhnliches zu berichten. So ist zum Beispiel bis heute das folgende, 1831 von Faraday [8] erstmalig beschriebene, einfache Vorführexperiment noch nicht verstanden: Man vibriere eine dünne Schicht von Sand auf einer Platte, zum Beispiel mit Hilfe eines Lautsprechers. Sofort entstehen spontan kleine Haufen, in denen sich der Sand bewegt. In der Mitte steigt der Sand nach oben und auf der Oberfläche rutscht er wieder runter. Weitere lustige Effekte sind in Ref. 3 beschrieben, die sich an ein breiteres Publikum richtet. Eine Vertiefung zum Thema bietet die Sammlung von Übersichtsartikeln in Ref. 11.

## Literatur

- [ 1 ] *P. Bak, C. Tang und K. Wiesenfeld*, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
- [ 2 ] *G. Peng und H. J. Herrmann*, Phys. Rev. E **49**, R1796 (1994).
- [ 3 ] *H. M. Jaeger und S. R. Nagel*, Science **255**, 1523 (1992).
- [ 4 ] *T. Pöschel und H. J. Herrmann*, Europhys. Lett. **29**, 123 (1995).
- [ 5 ] *J. W. Rudnicki und J. R. Rice*, J. Mech. Phys. Solids **23**, 371 (1975).
- [ 6 ] *A. N. Poliakov und H. J. Herrmann*, Geophys. Res. Lett. **21**, 2143 (1994).
- [ 7 ] *P. K. Haff, J. Fluid Mech.* **134**, 401 (1983); *J. T. Jenkins*, Arch. Rat'l. Mech. Anal., **87**, 355 (1985); *S. Savage*, J. Fluid Mech. **241**, 109 (1992).
- [ 8 ] *M. Faraday*, Phil. Trans. R. Soc. London **52**, 299 (1831).
- [ 9 ] *O. Reynolds*, Phil. Mag. Soc. **20**, 469 (1885).
- [10] *G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Horn und G. Grinstein*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1120 (1990).
- [11] *A. Hansen und D. Bideau* (Hrsg.) Disorder and Granular Media. North-Holland, Amsterdam 1992.